Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului

Olimpiada Naţională de Matematică 2008
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti
1 martie 2008
CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie a şi b două numere complexe. Să se demonstreze inegalitatea

$$|1+ab|+|a+b| \geq \sqrt{|a^2-1|\cdot|b^2-1|}.$$

Subiectul 2. Să se determine numerele întregi x pentru care

$$\log_3(1+2^x)=\log_2(1+x).$$

Subiectul 3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Demonstraţi că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-f(0)$ este aditivă, adică $g(x+y)=g(x)+g(y)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că f este constantă.

Subiectul 4. Fie $n\geq 3$ un număr întreg şi $z=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$.

Considerăm mulţimile

$$A=\{1,z,z^2,\ldots,z^{n-1}\}$$

şi

$$B=\{1,1+z,1+z+z^2,\ldots,1+z+\cdots+z^{n-1}\}.$$

Să se determine mulţimea $A\cap B$.

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii